

Über die partiellen Differentialgleichungen des magnetohydrostatischen Gleichgewichts

Richter, Egon

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1995 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.89-90



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

EGON RICHTER, Braunschweig

Über die partiellen Differentialgleichungen des magnetohydrostatischen Gleichgewichts

Braunschweig, 13. Oktober 1995*

In der Magnetohydrodynamik wird das statische Gleichgewicht eines Plasmas mit dem Druck p in einem Magnetfeld \mathbf{B} durch ein System quasilinearer partieller Differentialgleichungen beschrieben:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Exakte Lösungen dieser Gleichungen konnten bisher nur unter speziellen Annahmen hergeleitet werden.

Im folgenden wird eine auf SOPHUS LIE zurückgehende Lösungsmethode benutzt, die zu einer Symmetriereduktion des Differentialgleichungssystems führt und schließlich die Berechnung von Ähnlichkeitslösungen ermöglicht. Bei diesem Verfahren muß zuerst die Lie-Symmetriegruppe des Systems bestimmt werden. Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen eines Differentialgleichungssystems, die Lösungen des Systems auf (im allgemeinen andere) Lösungen desselben Systems abbilden, heißen Symmetrietransformationen des Differentialgleichungssystems. Für die auszuführenden Berechnungen ist von entscheidender Bedeutung, daß es genügt, anstelle der Lie-Symmetriegruppe G zunächst die ihr zugeordnete Lie-Algebra \mathcal{G} für das System zu bestimmen. Dies geschieht durch Berechnung der infinitesimalen Generatoren. Für die magnetohydrostatischen Gleichungen ergibt sich eine neundimensionale Lie-Algebra \mathcal{G} , deren Basiselemente neun einparametrische Transformationsgruppen erzeugen: drei räumliche Translationen, drei räumliche Drehungen, eine räumliche Skalierung, eine Feldskalierung und eine Translation des Druckes. Mit Hilfe dieser einparametrischen Gruppen kann jedes Element der vollständigen (zusammenhängenden lokalen) Lie-Symmetriegruppe G des Systems erzeugt werden.

Wenn verlangt wird, daß die Elemente einer Untergruppe H der Lie-Symmetriegruppe G eine Lösung des Differentialgleichungssystems auf *dieselbe* Lösung des Systems abbilden, heißt die Lösung H -invariant oder Ähnlichkeitslösung bezüglich $H \subset G$. Unter geeigneten, häufig erfüllten Voraussetzungen können diverse Ähnlichkeitslösungen aus Systemen *gewöhnlicher* Differentialgleichungen berechnet werden, die aus dem ursprünglich gegebenen System *partieller* Differentialgleichungen herleitbar sind. Das magnetohydrostatische Gleichungssystem mit drei unabhängigen Variablen läßt sich auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme reduzieren, wenn Ähnlichkeitslösungen bezüglich zweiparametrischer Untergruppen von G diskutiert werden.

* Zusammenfassung eines Vortrags vor der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

Die Klassifikation der Ähnlichkeitslösungen eines partiellen Differentialgleichungssystems läßt sich zurückführen auf eine Klassenbildung in G , die konjugierte Untergruppen $H \subset G$ benutzt. Symmetrietransformationen, die zu konjugierten Untergruppen gehören, liefern sogenannte *nicht wesentlich* verschiedene Ähnlichkeitslösungen. Da die Menge aller Untergruppen von G in disjunkte Klassen paarweise konjugierter Untergruppen zerfällt, genügt es, für die *wesentlich* verschiedenen Ähnlichkeitslösungen Listen von paarweise nicht konjugierten Repräsentanten der Klassen zueinander konjugierter Untergruppen von G anzulegen. Derartige Listen heißen Optimalsysteme. Diese Klasseneinteilung wird zweckmäßigerweise zunächst für die in analoger Weise definierbaren Optimalsysteme der zu G gehörenden Lie-Algebra \mathcal{G} ausgeführt. Für das magnetohydrostatische Gleichungssystem kann ein Optimalsystem mit 13 zweidimensionalen Unterálgebren von \mathcal{G} angegeben werden, aus dem sich 13 verschiedene gewöhnliche Differentialgleichungssysteme ergeben. Einige Lösungen dieser reduzierten Gleichungen liefern physikalisch interessante Ähnlichkeitslösungen der magnetohydrostatischen Gleichungen.

Eine ausführliche Darstellung der vorgetragenen Ergebnisse erscheint in den Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band XLVI, 1995.